โครงงานคณิตศาสตร์

เรื่อง การหาสูตรทั่วไปอย่างง่ายของความสัมพันธ์ของจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

โดย

นางสาวดาราวรรณ	ทองแก้ว	เลขที่ 12
นางสาวธนพร	จงลักษณาวรรณ	เลขที่ 15
นางสาวกมลรส	บิลมาล	เลขที่ 22

รายงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของวิชา I 30202 การสื่อสารและการนำเสนอ

ตามหลักสูตรห้องเรียนพิเศษวิทยาศาสตร์ของ สสวท.

โรงเรียนสะเดา "ขรรค์ชัยกัมพลานนท์อนุสรณ์"

ภาคเรียนที่ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6/1 ปีการศึกษา 2556

บทคัดย่อ

จากโครงงานคณิตศาสตร์การหาสูตรทั่วไปอย่างง่ายของความสัมพันธ์ของจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ได้ดำเนินการโดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อที่จะศึกษาวิธีการดำเนินการทางคณิตศาสตร์กับความสัมพันธ์ของจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า แล้วนำผลที่ได้ไปใช้ในการหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งทำให้เกิดความสะดวกในการจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

การดำเนินการเริ่มจากการร่วมกันคิด วิเคราะห์ วางแผน และตัดสินในเลือกเรื่องที่จะทำ แล้วมีการแบ่งงานไปศึกษาหาข้อมูล และดำเนินการศึกษาในหัวข้อที่ได้รับมอบหมาย หลังจากนั้นนำผลการศึกษาที่ได้มาสรุป วิเคราะห์ แล้วเรียบเรียงเป็นรูปเล่มรายงาน

ผลจากการศึกษาด้วยการสังเกต พบว่าความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นไปตามเรื่องทฤษฎีบททวินามและลำดับเลขคณิต สามารถนำผลจากการศึกษาไปประยุกต์ใช้ในการหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า จากการดำเนินการศึกษา พบว่าจะได้สูตรอย่างง่าย และสามารถแบ่งได้ 2 กรณี คือ การหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแถวคู่ และการหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแถวคี่

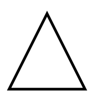
สารบัญ

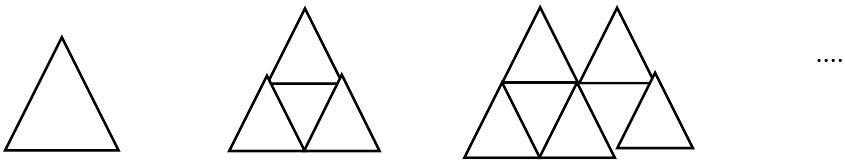
หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญ

การศึกษาโครงงานนี้ได้แนวคิดมาจากการสังเกตรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า โดยมีความสัมพันธ์ดังนี้





จำนวนรูป 1 5 13

คณะผู้จัดทำโครงงานได้นำความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าดังกล่าว มาคิดวิเคราะห์ว่าหากจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีจำนวนมากขึ้น จะสามารถหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าได้อย่างไรโดยไม่อาศัยวิธีการนับ ทางคณะผู้จัดทำจึงมีความสนใจที่จะหาสูตรทั่วไปของความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่านี้และสามารถนำสูตรทั่วไปมาใช้ได้จริง

คณะผู้จัดทำโครงงานจึงได้จัดทำโครงงาน การหาสูตรทั่วไปอย่างง่ายของความสัมพันธ์ของจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าโดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในเรื่องของลำดับเลขคณิตและทฤษฎีบททวินาม เพื่อที่จะขยายแนวคิด พัฒนาความรู้และการนำไปใช้ต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงงาน

1.เพื่อหาสูตรทั่วไปอย่างง่ายของความสัมพันธ์ของจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า โดยใช้ความรู้ของลำดับเลขคณิตและทฤษฎีบททวินาม

2.เพื่อนำสูตรทั่วไปอย่างง่ายที่ได้ ไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.ได้สูตรทั่วไปอย่างง่ายของความสัมพันธ์ของจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

2.สามารถนำสูตรทั่วไปอย่างง่ายที่ได้ ไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้

1.4 ขอบเขตของโครงงาน

ในการทำโครงงานคณิตศาสตร์เรื่องการหาสูตรทั่วไปอย่างง่ายของความสัมพันธ์ของจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า คณะผู้จัดทำใช้ความรู้ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่5 เรื่องทฤษฎีบททวินาม และในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่6 เรื่องลำดับเลขคณิต

บทที่ 2
เอกสารและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

จากโครงงานเรื่องการหาสูตรทั่วไปอย่างง่ายของความสัมพันธ์ของจำนวนรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีเอกสารและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 ทฤษฎีบททวินาม (BINOMAIAL THEOREM)

ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

จากทฤษฎีบทดังกล่าวแสดงว่า เราสามารถกระจาย $(a+b)^n$ ให้อยู่ในรูปผลบวกและสมบัติที่น่าสนใจดังนี้

1. ผลบวกการกระจายต้องมี n + 1 พจน์
2. ผลบวกของเลขชี้กำลังของ a และ b ในแต่ละพจน์ต้องเท่ากับ n เสมอ
3. เลขชี้กำลังของ a จะเริ่มจาก n และลดครั้งละ1 จนกระทั่งเหลือ 0 แต่เลขชี้กำลังของ b จะเริ่มจาก 0และเพิ่มขึ้นครั้งละ1 จนกระทั่งเท่ากับ n

4. สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์จะอยู่ในรูปของ $\binom{n}{k}$ เมื่อ k คือเลขชี้กำลังของ a หรือ b

5. สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ 1 และพจน์สุดท้ายเท่ากัน สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ 2 และพจน์สุดท้าย เท่ากัน เป็นเช่นไปเรื่อยๆ

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ พิจารณาสัมประสิทธิ์ของ $(a+b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับดังนี้

การกระจายของ $(a+b)^n$	สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์
$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = a+b$	1 1
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	1 5 10 10 5 1

2.2 ลำดับเลขคณิต

ลำดับเลขคณิต (Arithmetic Sequence or Arithmetic Progression) ย่อด้วย A.P หรือ A.S คือลำดับที่มีผลต่างร่วม (common difference ตัวย่อ d) ระหว่างพจน์ที่n กับพจน์ที่ n+1 มีค่าคงที่

นั่นคือ $a_{n+1} - a_n = d$ หรือ $a_{n+1} = a_n + d$

จะได้ว่า $a_2 - a_1 = d \quad (1)$

$a_3 - a_2 = d \quad (2)$

$a_4 - a_3 = d \quad (3)$

.

.

.

$a_{n-1} - a_{n-2} = d \quad (n-2)$

$a_n - a_{n-1} = d \quad (n-1)$

เมื่อจับสมการ(1)+(2)+(3)+…+(n−2)+(n−1)(มีn−1สมการ) จะได้ว่า

$a_n - a_1 = (n-1)d$

หรือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

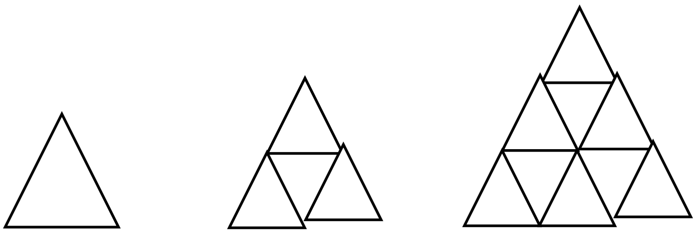
2.2.1พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ในรูปของ a_1 และ d คือ $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \ldots, a_1 + (n-1)d$ ซึ่งเกิดจากการแทนค่า $n = 1,2,3,\ldots,n$

บทที่ 3

วิธีดำเนินการ

จากการสังเกตรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าต่อไปนี้



....

จำนวนรูป 1 5

13

สามารถดำเนินการหาผลต่างได้ ดังนี้

1 5 13 27 48 78

118 170 ...

4 8 14 21 30

40 52

4 6 7 9 10

12

2 1 2 1 2

สังเกตได้ว่า เมื่อหาผลต่างแล้วจะได้ค่าคงที่ที่เรียงสลับกันต่อไปเรื่อยๆจึงแยกกรณีเป็นแถวคี่และแถวคู่

แถวคี่

a_1 1 13 48 118

235 411

d_1 12 35 70 117

176

d_2 23 35 47

59

d_3 12 12 12

จาก $a_n = a_1 + \binom{n-1}{1}d_1 + \binom{n-1}{2}d_2 + \binom{n-1}{3}d_3 + \cdots + \binom{n-1}{n}d_n$

จะได้

$$a_n = 1 + (n-1)12 + \frac{(n-1)(n-2)23}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)12}{6}$$

$$= 1 + 12n + \frac{(n^2 - 3n + 2)23}{2} + (n^3 - 6n^2 + 11n - 6)2$$

$$= 1 + 12n - 12 + \frac{23n^2 - 69n + 46}{2} + 2n^3 - 12n^2 + 22n - 12$$

$$= \frac{2 + 24n - 24 + 23n^2 - 69n + 46 + 4n^3 - 4n^2 + 44n - 24}{2}$$

$$= \frac{23n^2 - 45n + 24 + 4n^3 - 24n^2 + 44n - 24}{2}$$

$$= \frac{4n^3 - n^2 - n}{2} \quad , n = 1,2,3,\ldots,n$$

แถวคู่

a_1 5 27 78 170
315 525

d_1 22 51 92 145
210

d_2 29 41 53
65

d_3 12 12 12 …

จาก $a_n = a_1 + \binom{n-1}{1}d_1 + \binom{n-1}{2}d_2 + \binom{n-1}{3}d_3 + \cdots + \binom{n-1}{n}d_n$

จะได้

$$a_n = 5 + (n-1)22 + \frac{(n-1)(n-2)29}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(12)}{6}$$

$$= 5 + 22n - 22 + \frac{(n^2 - 3n + 2)29}{2} + (n^3 - 6n^2 + 11n - 6)2$$

$$= 5 + 22n - 22 + \frac{29n^2 - 87n + 58}{2} + 2n^3 - 12n^2 + 22n - 12$$

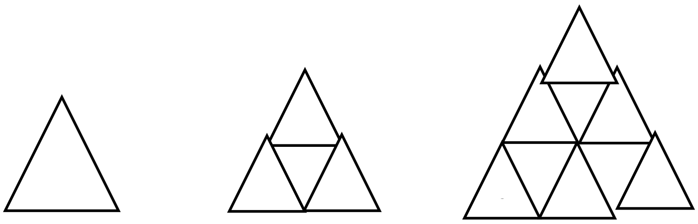
$$= \frac{10 + 44n - 44 + 29n^2 - 87n + 58 + 4n^3 - 24n^2 + 44n - 24}{2}$$

$$= \frac{4n^3 + 5n^2 + n}{2} \quad , n = 1,2,3, \dots , n$$

บทที่ 4

ผลการดำเนินงาน

จากการพิสูจน์หาสูตรทั่วไปของสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความสัมพันธ์การศึกษาโครงงานนี้ได้แนวคิดมาจากการสังเกตรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า โดยมีความสัมพันธ์ดังนี้



....

จำนวนรูป 1 5 13

ทางคณะผู้จัดทำได้หาสูตรสุดท้ายของความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่านี้ได้ โดยแยกเป็นกรณีดังนี้

แถวคี่ $a_n = \frac{4n^3 - n^2 - n}{2} \quad , n = 1,2,3, \dots , n$

แถวคู่ $a_n = \frac{4n^3 + 5n^2 + n}{2} \quad , n = 1,2,3, \dots , n$

บทที่ 5
สรุปผล อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผล

จากการพิสูจน์หารูปทั่วไปของสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความสัมพันธ์กันได้ดังนี้

แถวคี่ $a_{\mathrm{n}} = \frac{4\mathrm{n}^3-\mathrm{n}^2-\mathrm{n}}{2}$ $,\mathrm{n} = 1,2,3,\dots,\mathrm{n}$

แถวคู่ $a_{\mathrm{n}} = \frac{4\mathrm{n}^3+5\mathrm{n}^2+\mathrm{n}}{2}$ $,\ \mathrm{n} = 1,2,3,\dots,\mathrm{n}$

5.2 อภิปรายผล

จากการหารูปทั่วไปของสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความสัมพันธ์กัน จนได้สูตรสุดท้ายโดยการใช้ทฤษฎีบททวินาม ลำดับเลขคณิต อาศัยการสังเกตตั้งแต่การสังเกตรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความสัมพันธ์กัน ดำเนินการหาผลต่างจนได้ค่าคงที่ที่เรียงสลับกันไปเรื่อยๆ และแยกเป็นกรณี แถวคี่ แถวคู่ จนได้สูตรสุดท้าย

5.3 ข้อเสนอแนะ

1.เพิ่มวิธีในการพิสูจน์หาสูตรทั่วไปให้มีความแตกต่างจากวิธีเดิม

2.เปลี่ยนความสัมพันธ์จากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นสี่เหลี่ยมด้านเท่าหรือรูปอื่นๆ

เอกสารอ้างอิง

ทฤษฎีบททวินาม (ออนไลน์). (2556). สืบค้นจาก :
http://www.krudung.com/webst/2552/501/32/index4.html

ลำดับเลขคณิต (ออนไลน์). (2556). สืบค้นจาก :
http://www.doesystem.com/abe032445