



การพิสูจน์

ทฤษฎีบท ถ้าผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เท่ากับสองมุมฉาก แล้วรูปสี่เหลี่ยมนั้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

แนวคิดในการพิสูจน์

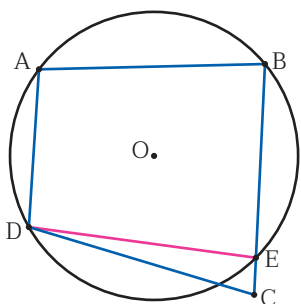
กำหนดให้ $\square ABCD$ มีผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามเท่ากับ 180°

นั่นคือ $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$

สร้างวงกลม O ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABD

สมมติว่าจุด C ไม่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม O

กรณีที่ 1 จุด C อยู่ภายนอกวงกลม O



จะได้ว่า BC ตัดเส้นรอบวงของวงกลม O

กำหนดให้จุดตัดนั้น คือ จุด E

จะได้ว่า $\square ABED$ มีวงกลมล้อมรอบ

โดยทฤษฎีบทที่ว่า ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม แล้วจะมีผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามเท่ากับสองมุมฉาก

จะได้ว่า $\widehat{BAD} + \widehat{BED} = 180^\circ$

ทำให้ $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ = \widehat{BAD} + \widehat{BED}$

ดังนั้น $\widehat{BCD} = \widehat{BED}$

ทำให้ขัดแย้งกับทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยม

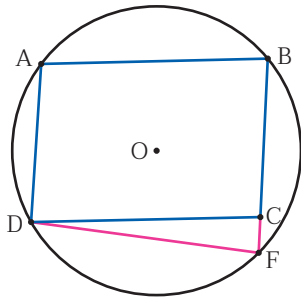
ซึ่งจะได้ว่า $\widehat{BED} = \widehat{BCD} + \widehat{CDE}$

ดังนั้น กรณีที่ 1 นี้ จึงไม่เกิดขึ้น

นั่นคือ จุด C จะอยู่ภายนอกวงกลม O ไม่ได้



กรณีที่ 2 จุด C อยู่ภายในวงกลม O



จะได้ว่า ส่วนต่อของด้าน BC ตัดเส้นรอบวงของวงกลม O

กำหนดให้จุดตัดนั้น คือ จุด F

จะได้ว่า $\square ABFD$ มีวงกลมล้อมรอบ

โดยทฤษฎีบทที่ว่า ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม แล้วจะมีผลบวกของขนาดของมุมตรงข้ามเท่ากับสองมุมฉาก

$$\text{จะได้ว่า } \widehat{BAD} + \widehat{BFD} = 180^\circ$$

$$\text{ทำให้ } \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ = \widehat{BAD} + \widehat{BFD}$$

$$\text{ดังนั้น } \widehat{BCD} = \widehat{BFD}$$

ทำให้ขัดแย้งกับทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยม

$$\text{ซึ่งจะได้ว่า } \widehat{BCD} = \widehat{BFD} + \widehat{FDC}$$

ดังนั้น กรณีที่ 2 นี้ จึงไม่เกิดขึ้น

นั่นคือ จุด C จะอยู่ภายในวงกลม O ไม่ได้

จากการขัดแย้งที่เกิดขึ้นทั้งสองกรณี และการที่วงกลม O แบ่งจุดบนระนาบออกเป็น 3 ส่วน คือ จุดที่อยู่ภายนอกวงกลม O จุดที่อยู่ภายในวงกลม O และจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม O ทำให้ได้ว่า จุด C จะต้องเป็นจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม O เท่านั้น

ดังนั้น $\square ABCD$ จึงเป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม