

ผลการเรียนรู้

ระบุได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

สาระสำคัญ

ลิมิตของลำดับอนันต์

บทนิยาม 5 ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับอนันต์ ถ้า n มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุดแล้ว a_n เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น จะเขียน $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ (อ่านว่า ลิมิตของลำดับ a_n เมื่อ n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด เท่ากับ L) และจะเรียก L ว่า **ลิมิตของลำดับ (limit of a sequence)** และกล่าวว่าลำดับนี้มีลิมิตเท่ากับ L เรียกลำดับอนันต์ที่มีลิมิตว่า **ลำดับลู่เข้า (convergent sequence)** และเรียกลำดับอนันต์ที่ไม่ใช่ลำดับลู่เข้าว่า **ลำดับลู่ออก (divergent sequence)**

ทฤษฎีบท 1 ให้ r เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r$ ไม่มีค่า

ทฤษฎีบท 2 ให้ r เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

ถ้า $|r| < 1$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$

ถ้า $|r| > 1$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ ไม่มีค่า

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาลิมิตของลำดับอนันต์ได้

สาระการเรียนรู้

ลิมิตของลำดับอนันต์

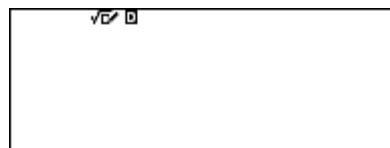
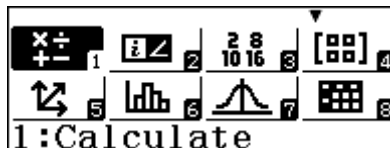
กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูทบทวนความรู้เรื่องการหาค่าของลำดับ ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถหาลิมิตของลำดับอนันต์ได้
2. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม 3 – 5 คน เพื่อทำใบกิจกรรมที่ 1 โดยให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz ในการสำรวจคำตอบและให้นักเรียนในกลุ่มร่วมกันอภิปรายถึงข้อค้นพบในแต่ละข้อในใบกิจกรรมที่ 1 เพื่อตอบคำถามท้ายข้อในแต่ละข้อ (**ขั้นการสำรวจและหาความสัมพันธ์**)

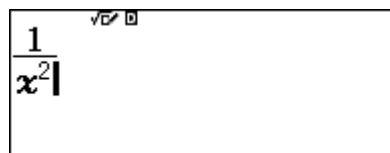
3. ครูอธิบายบทนิยามลิมิตของลำดับ
4. ครูให้นักเรียนนำเสนอผลจากการอภิปราย จากใบกิจกรรม ดังนี้
 - จากใบกิจกรรมข้อที่ 1.1 มีแนวทางการหาลิมิตของลำดับดังนี้

กำหนดให้ $a_n = \frac{1}{n^2}$ ใช้เครื่องคำนวณหาลิมิตของลำดับดังนี้

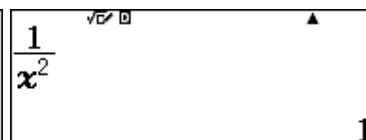
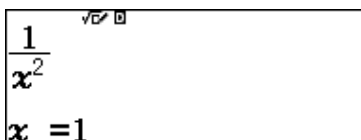
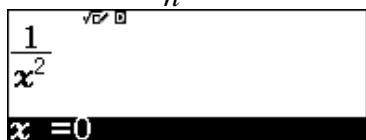
- 1) ใช้ MENU 1 : Calculate



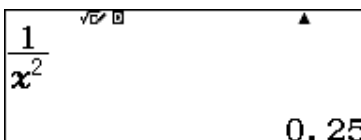
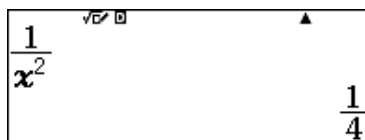
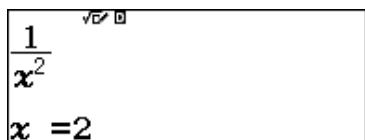
- 2) ป้อนฟังก์ชันที่จะหาลิมิตโดยใช้ x แทน n ดังนี้



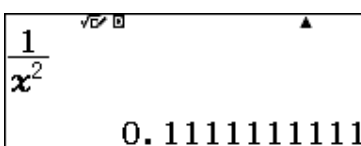
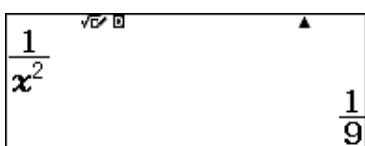
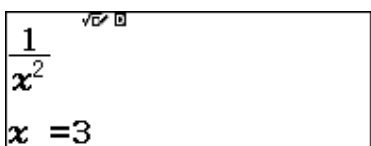
- 3) จาก $a_n = \frac{1}{n^2}$ หาค่า a_1 จะได้ $a_1 = 1$ ดังนี้ **CALC 1 = =**



- 4) หาค่า a_2 จะได้ $a_2 = \frac{1}{4} = 0.25$ ดังนี้ **CALC 2 = = S/D**



- 5) หาค่า a_3 จะได้ $a_3 = \frac{1}{9} = 0.1$ ดังนี้ **CALC 3 = = S/D**



- 6) หา a_3, a_4, a_5, \dots โดยวิธีเดียวกันจะได้ a_n คือ $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25} \dots$

7) หา $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ โดยการลองแทนค่า n เป็นจำนวนที่มีค่ามาก ๆ ทำได้ดังนี้

$\frac{1}{x^2}$ $x = 100$	$\frac{1}{x^2}$ 1×10^{-4}
$\frac{1}{x^2}$ $x = 10000$	$\frac{1}{x^2}$ 1×10^{-8}
$\frac{1}{x^2}$ $x = 1000000$	$\frac{1}{x^2}$ 1×10^{-12}
$\frac{1}{x^2}$ $x = 1000000000$	$\frac{1}{x^2}$ 1×10^{-18}

8) จากข้อ 7) ได้ว่า ถ้า $n = 100$ จะได้ $a_n = 1 \times 10^{-4}$
 $n = 10,000$ จะได้ $a_n = 1 \times 10^{-8}$
 $n = 1,000,000$ จะได้ $a_n = 1 \times 10^{-12}$
 $n = 1,000,000,000$ จะได้ $a_n = 1 \times 10^{-18}$

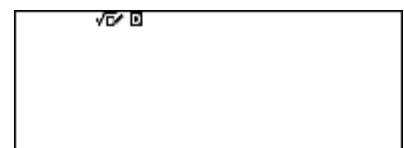
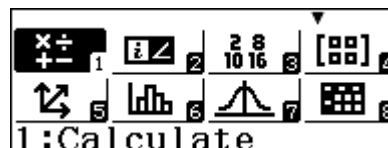
พบว่าเมื่อ n มีค่ามากขึ้น ค่าของ a_n จะลดลงและเข้าใกล้ 0

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ และลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า

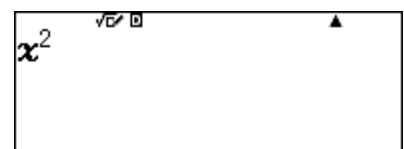
- จากใบกิจกรรมที่ 1 ข้อที่ 1.2, 1.3 สามารถหาคำตอบได้โดยอาศัยวิธีการเดียวกัน
- จากใบกิจกรรมที่ 1 ข้อที่ 1.5 มีแนวทางการหาขีดจำกัดของลำดับดังนี้

กำหนดให้ $a_n = n^2$ ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz หาค่าขีดจำกัดของลำดับดังนี้

1) ใช้ MENU 1 : Calculate



2) ป้อนฟังก์ชันที่จะหาขีดจำกัดโดยใช้ x แทน n ดังนี้ x x^2



- 3) จาก $a_n = n^2$ หาค่า a_1 จะได้ $a_1 = 1$ ดังนี้

CALC **1** **=** **=**

$$x^2$$

$$x = 1$$

$$x^2$$

$$1$$

- 4) หา $a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ โดยวิธีเดียวกันจะได้ a_n คือ 1, 4, 9, 16, 25...

- 5) หา $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ โดยการลองแทนค่า n เป็นจำนวนที่มีค่ามาก ๆ ทำได้ดังนี้

$$x^2$$

$$x = 1000000$$

$$x^2$$

$$1 \times 10^{12}$$

$$x^2$$

$$x = 100000000$$

$$x^2$$

$$1 \times 10^{16}$$

พบว่าเมื่อ n มีค่ามากขึ้น ค่าของ a_n จะเพิ่มขึ้นและไม่เข้าใกล้จำนวนใดจำนวนหนึ่ง

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ไม่มีค่า และลำดับนี้เป็นลำดับลู่ออก

- จากใบกิจกรรมข้อที่ 1.4, 1.6 สามารถหาคำตอบได้โดยอาศัยวิธีการเดียวกัน

5. เมื่อนักเรียนทำกิจกรรมข้อ 1.1 – 1.6 จะสามารถสร้างข้อคาดการณ์ได้ว่า

ให้ r เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r} = 0$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r$ ไม่มีค่า (ขั้นสรุปความสัมพันธ์)

6. ตัวอย่างการใช้เครื่องคำนวณทำกิจกรรมข้อ 2.1 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

- 1) ป้อนฟังก์ชันที่จะหาขีดจำกัดโดยใช้ x แทน n ดังนี้

(**(** **1** **▼** **2** **►** **)** **x^** **x**

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

- 2) หา $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ โดยการลองแทนค่า n เป็นจำนวนเต็มต่างๆ และมีค่ามากขึ้น เช่น

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$x = 10$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$\frac{1}{1024}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$9.765625 \times 10^{-4}$$

สรุปได้ว่า เมื่อ $n = 10$ จะได้ $a_n = \frac{1}{1024} \approx 9.77 \times 10^{-4}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $x = 100$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $7.888609052 \times 10^{-31}$
--	--

สรุปได้ว่า เมื่อ $n = 100$ จะได้ $a_n \approx 7.89 \times 10^{-31}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ $x = 1000000$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 0
--	----------------------------------

สรุปได้ว่า เมื่อ $n = 1,000,000$ จะได้ $a_n \approx 0$

3) พบว่าเมื่อ n มีค่ามากขึ้น ค่าของ a_n จะลดลงและเข้าใกล้ 0 และลำดับนี้เป็นลำดับลู่เข้า

7. เมื่อนักเรียนทำกิจกรรมข้อ 2.1 – 2.10 จะสามารถสร้างข้อคาดการณ์ได้ว่า
ให้ r เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

ถ้า $|r| < 1$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$

ถ้า $|r| > 1$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ ไม่มีค่า (ขั้นสรุปความสัมพันธ์)

8. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 1 (ขั้นการฝึกทักษะ)

สื่อการเรียนรู้/แหล่งเรียนรู้

1. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz
2. ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่องการหาค่าลิมิตของลำดับอนันต์
3. แบบฝึกทักษะที่ 1 เรื่องการหาค่าลิมิตของลำดับอนันต์

การวัดผลและประเมินผล

1. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 1
2. ประเมินจากการทำแบบฝึกทักษะที่ 1
3. ประเมินจากการตอบคำถามของนักเรียน

ใบกิจกรรมที่ 1

เรื่อง การหาลำดับของลําดับอนันต์

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz ทำกิจกรรมต่อไปนี้

1) จงหาลำดับของลําดับต่อไปนี้

1.1 $a_n = \frac{1}{n^2}$

เขียนเป็นลําดับได้เป็น.....

จากลําดับที่ได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$

ลําดับดังกล่าวเป็นลําดับลู่เข้าหรือลู่ออก.....

1.2 $a_n = \frac{1}{n^4}$

เขียนเป็นลําดับได้เป็น.....

จากลําดับที่ได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4}$

ลําดับดังกล่าวเป็นลําดับลู่เข้าหรือลู่ออก.....

1.3 $a_n = \frac{1}{\frac{1}{n^2}}$

เขียนเป็นลําดับได้เป็น.....

จากลําดับที่ได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{n^2}} \right)$

ลําดับดังกล่าวเป็นลําดับลู่เข้าหรือลู่ออก.....

1.4 $a_n = n$

เขียนเป็นลําดับได้เป็น.....

จากลําดับที่ได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} n$

ลําดับดังกล่าวเป็นลําดับลู่เข้าหรือลู่ออก.....

1.5 $a_n = n^2$

เขียนเป็นลำดับได้เป็น.....

จากลำดับที่ได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2$

ลำดับดังกล่าวเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก.....

1.6 $a_n = n^{\frac{1}{2}}$

เขียนเป็นลำดับได้เป็น.....

จากลำดับที่ได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}}$

ลำดับดังกล่าวเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก.....

จากกิจกรรมข้อ 1) จะได้ข้อคาดการณ์คือ

ให้ r เป็นจำนวนจริงบวก

• $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^r}$

• $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r$

2) จงหาลิมิตของลำดับต่อไปนี้

2.1 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

เขียนเป็นลำดับได้เป็น.....

จากลำดับที่ได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ลำดับดังกล่าวเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก.....

2.2 $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

เขียนเป็นลำดับได้เป็น.....

จากลำดับที่ได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

ลำดับดังกล่าวเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก.....

$$2.3 \quad a_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

เขียนเป็นลำดับได้เป็น.....

จากลำดับที่ได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$

ลำดับดังกล่าวเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก.....

$$2.4 \quad a_n = \left(-\frac{3}{5}\right)^n$$

เขียนเป็นลำดับได้เป็น.....

จากลำดับที่ได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{5}\right)^n$

ลำดับดังกล่าวเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก.....

$$2.5 \quad a_n = (0.4)^n$$

เขียนเป็นลำดับได้เป็น.....

จากลำดับที่ได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} (0.4)^n$

ลำดับดังกล่าวเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก.....

$$2.7 \quad a_n = \left(-\frac{5}{4}\right)^n$$

เขียนเป็นลำดับได้เป็น.....

จากลำดับที่ได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{4}\right)^n$

ลำดับดังกล่าวเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก.....

$$2.8 \quad a_n = 2^n$$

เขียนเป็นลำดับได้เป็น.....

จากลำดับที่ได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n$

ลำดับดังกล่าวเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก.....

2.9 $a_n = (1.1)^n$

เขียนเป็นลำดับได้เป็น.....

จากลำดับที่ได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} (1.1)^n$

ลำดับดังกล่าวเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก.....

2.10 $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

เขียนเป็นลำดับได้เป็น.....

จากลำดับที่ได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

ลำดับดังกล่าวเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก.....

จากกิจกรรมข้อ 2) จะได้ข้อคาดการณ์คือ

ให้ r เป็นจำนวนจริงบวก

- ถ้า $|r| < 1$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$
- ถ้า $|r| > 1$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$

แบบฝึกทักษะที่ 1

เรื่อง การหาลำดับของลําดับอนันต์

คำชี้แจง จงหาลำดับของลําดับต่อไปนี้ โดยนักเรียนสามารถใช้เครื่องคำนวณตรวจสอบความถูกต้องของคำตอบ

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}}$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{-2}}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3}$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^n}$

7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

8) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2})^n$

9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{99}{100}\right)^n$

10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{-n}$