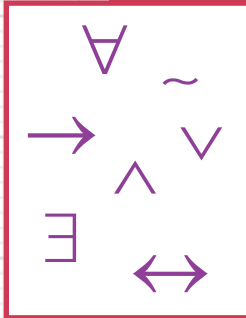


บทที่

| ตรรกศาสตร์เบื้องต้น

2



2.1 ประพจน์

2.2 การเชื่อมประพจน์

2.2.1 นิเสธของประพจน์

2.2.2 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “และ”

2.2.3 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “หรือ”

2.2.4 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว...”

2.2.5 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ก็ต่อเมื่อ”



จุดมุ่งหมาย

1. จำแนกข้อความว่าเป็นประพจน์หรือไม่เป็นประพจน์
2. หาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม
3. ใช้ความรู้เกี่ยวกับตรรกศาสตร์เบื้องต้นในการสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์

“

ความสามารถในการคิดและให้เหตุผลเป็นสิ่งที่มีคุณค่ามากที่สุดอย่างหนึ่งของมนุษย์ ตรรกศาสตร์เป็นศาสตร์ที่ว่าด้วยเรื่องของการใช้เหตุผลและผลในชีวิตประจำวัน แพทย์จำเป็นต้องวินิจฉัยโรคจากข้อมูลต่าง ๆ ประกอบกัน จึงจะสรุปว่าคนไข้เป็นโรคอะไร และต้องได้รับการรักษาอย่างไร นักกฎหมาย ทนายความ ตำรวจ ต้องวิเคราะห์จากพยานหลักฐานต่าง ๆ เพื่อโยงจากเหตุไปสู่ผล นักคอมพิวเตอร์ต้องเขียนโปรแกรมเพื่อให้คอมพิวเตอร์ทำงานประมวลผลข้อมูลโดยใช้หลักตรรกศาสตร์ ตรรกศาสตร์เป็นเสมือนภาษาที่ใช้ในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ ทำให้วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเหตุผลเพื่ออธิบายสิ่งต่าง ๆ ได้อย่างรัดกุม



”



ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับจำนวน สมการ และอสมการในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
- เซต



goo.gl/EKaUZt

2.1 ประพจน์

ประพจน์ (statement) คือ ประโยคหรือข้อความที่เป็นจริงหรือเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ซึ่งประโยคหรือข้อความดังกล่าวจะอยู่ในรูปบอกเล่าหรือปฏิเสธก็ได้

ตัวอย่างประโยคหรือข้อความที่เป็นประพจน์

| | |
|--|--------|
| ดวงอาทิตย์เป็นดาวฤกษ์ | (จริง) |
| ดาวศุกร์เป็นดาวเคราะห์แคระ | (เท็จ) |
| กรุงเทพมหานครอยู่ทางภาคใต้ของประเทศไทย | (เท็จ) |
| ยอดเขาที่สูงที่สุดในโลกอยู่ในประเทศไทย | (เท็จ) |
| 2 เป็นจำนวนคู่ | (จริง) |
| $2 + 3 = 2 \times 3$ | (เท็จ) |
| $100^0 = 1$ | (จริง) |
| เซตว่างเป็นสับเซตของเซตทุกเซต | (จริง) |
| ผลบวกของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมเป็น 180 องศา | (จริง) |



เสริมสมอง : Aristotle



Aristotle (384 – 322 ปีก่อนคริสต์ศักราช) นักปรัชญาและนักวิทยาศาสตร์ชาวกรีก เป็นผู้ริเริ่มศึกษาดรรกศาสตร์อย่างเป็นระบบ และได้รับการยกย่องว่าเป็นบิดาของวิชาตรรกศาสตร์ โดยงานทางด้านตรรกศาสตร์ของเขาได้รวบรวมไว้ในชุดหนังสือชื่อ Organon

ในตรรกศาสตร์เรียกการเป็น **จริง** หรือ **เท็จ** ของแต่ละประพจน์ว่า **ค่าความจริง (truth value)** ของประพจน์ เช่น เซตว่างเป็นสับเซตของเซตทุกเซต เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง หรือกล่าวสั้น ๆ ได้ว่า เซตว่างเป็นสับเซตของเซตทุกเซต เป็นประพจน์ที่เป็นจริง

ตัวอย่างประโยคหรือข้อความที่ไม่เป็นประพจน์

ขอภัยในความไม่สะดวก

กรุณาเคารพสถานที่โดยการแต่งกายให้สุภาพเรียบร้อย

โปรดงดสูบบุหรี่

ห้ามนำอาหารและเครื่องดื่มทุกชนิดเข้ามาในห้องสมุด

จงเติมคำตอบลงในช่องว่าง

หนังสือเล่มนี้ราคาเท่าใด

อนิจจา

อยากเก่งแบบอัลเบิร์ต ไอน์สไตน์

ตำน้ำพริกละลายแม่น้ำ



แบบฝึกหัด 2.1

1. จงพิจารณาประโยคหรือข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นประพจน์หรือไม่ ถ้าเป็นประพจน์

จงหาค่าความจริงของประพจน์นั้น

1) เดือนสิงหาคมมี 30 วัน

2) $7 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

3) $(8+22)^3$ หารด้วย 10^2 ไม่ลงตัว

4) กรุณารักษาความสะอาด

5) จงตอบคำถามต่อไปนี้

6) $\pi > 3$

7) 9 เป็นจำนวนเฉพาะ

8) $\emptyset \subset \{1, 2\}$

9) โทรได้ไม่อัน

10) 7 เป็นตัวประกอบของ 217

11) $\{ก, ข, ค\} = \{1, 2, 3\}$

- 12) $\emptyset \cup \{0\} \neq \{\emptyset, 0\}$
- 13) อย่ามายุ่งกับฉันได้ไหม
- 14) ทำไมมาโรงเรียนสาย
- 15) $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนเต็ม
- 16) ขอให้เดินทางกลับโดยสวัสดิภาพ
- 17) ยินดีต้อนรับ
- 18) ตัวประกอบที่เป็นจำนวนเต็มบวกทั้งหมดของ 12 มี 6 ตัว

2. จงเขียนประโยคหรือข้อความที่เป็นประพจน์มา 5 ประพจน์ พร้อมทั้งบอกค่าความจริงของประพจน์นั้น ๆ

2.2 การเชื่อมประพจน์

ชายคนหนึ่งเข้าพักในโรงแรมแห่งหนึ่ง และต้องการสั่งอาหารเข้ามารับประทานที่ห้องพัก ในรายการอาหารของโรงแรม มีข้อความต่อไปนี้ปรากฏอยู่

ชุดอาหารเข้าพิเศษสำหรับท่าน เพียง 199 บาท ท่านจะได้รับ

- ไช้ดาวหรือไชลวก
- ไส้กรอกรมควันหรือแฮมทอด
- ขนมปังปิ้ง 2 ชิ้น
- เครื่องดื่ม 1 แก้ว

หากชายผู้นี้สั่งอาหารเข้าชุดนี้ ในราคา 199 บาท เป็นไปได้หรือไม่ที่เขาจะได้รับ ไช้ดาว ไชลวก ไส้กรอกรมควัน แฮมทอด ขนมปังปิ้ง 2 ชิ้น และน้ำส้มคั้น 1 แก้ว

จากข้อความข้างต้นมีการใช้คำว่า “หรือ” และใช้เครื่องหมาย “•” แทนคำว่า “และ” ซึ่งส่งผลต่อความหมายของประโยค หากไม่เข้าใจรูปแบบการใช้คำทั้งสองจะทำให้ตีความผิดได้ จะเห็นว่าตัวเชื่อมในประโยคมีบทบาทสำคัญมากในชีวิตประจำวัน

ในวิชาคณิตศาสตร์เรียกคำ “ไม่” “และ” “หรือ” “ถ้า...แล้ว...” และ “ก็ต่อเมื่อ” ว่า **ตัวเชื่อม (connective)** ประพจน์ที่ได้ศึกษามาแล้วในหัวข้อ 2.1 เป็นประพจน์ที่เรียกว่า **ประพจน์เชิงเดียว (simple statement)** ซึ่งสามารถนำมาสร้างประพจน์ที่ซับซ้อนขึ้นเรียกว่า **ประพจน์เชิงประกอบ (compound statement)** โดยอาศัยตัวเชื่อมที่กล่าวถึงข้างต้น เช่น

2 เป็นจำนวนคู่ และ 2 หาร 4 ลงตัว

ประกอบด้วยประพจน์เชิงเดียว 2 ประพจน์คือ “2 เป็นจำนวนคู่” และ “2 หาร 4 ลงตัว” เชื่อมกันด้วยตัวเชื่อม “และ”

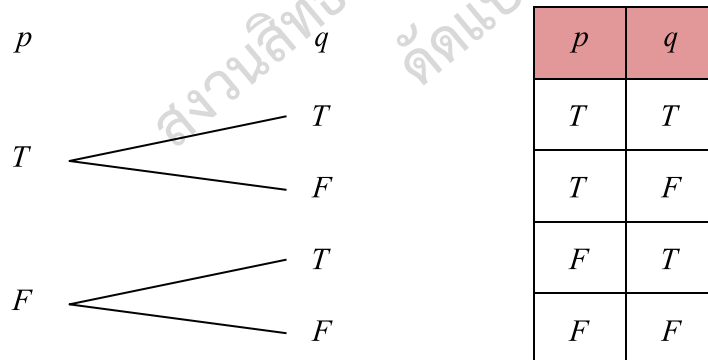
นิยมใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก เช่น p, q, r, s แทนประพจน์ที่นำมาเชื่อมกัน

ถ้า p เป็นประพจน์ใด ๆ แล้วค่าความจริงของ p เป็นได้ 2 กรณี คือ **จริง (true)** ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ T หรือ **เท็จ (false)** ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ F แสดงได้ดังตาราง

| |
|-----|
| p |
| T |
| F |

เรียกตารางซึ่งแสดงกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมดของประพจน์ p ว่า **ตารางค่าความจริง (truth table) ของ p**

ถ้ามีสองประพจน์ คือ p และ q แล้วจะมีกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมด 4 กรณี ซึ่ง T และ F ของ p ต่างก็จับคู่กับกรณี T และ F ของ q ได้ดังนี้



2.2.1 นิเสธของประพจน์

ถ้า p เป็นประพจน์ใด ๆ แล้ว นิเสธ (negation) ของ p เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sim p$

ตัวอย่างนิเสธของประพจน์

| p | $\sim p$ |
|----------------------------|-------------------------------|
| ประจิมชอบวิชาคณิตศาสตร์ | ประจิมไม่ชอบวิชาคณิตศาสตร์ |
| $2+3=5$ | $2+3 \neq 5$ |
| $2 < 3$ | $2 \not< 3$ |
| $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ | $\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ |

หมายเหตุ $2 \not< 3$ อ่านว่า 2 ไม่น้อยกว่า 3 หมายความว่า 2 อาจเท่ากับ 3 หรือมากกว่า 3 ซึ่งเขียนได้อีกแบบหนึ่งว่า $2 \geq 3$

การพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ที่เป็นนิเสธของประพจน์เดิมทำได้โดยง่าย เพราะค่าความจริงของนิเสธจะตรงข้ามกับค่าความจริงของประพจน์เดิมเสมอ เขียนตารางค่าความจริงของ $\sim p$ ได้ดังนี้

| p | $\sim p$ |
|-----|----------|
| T | F |
| F | T |

ค่าความจริงของประพจน์ที่เป็นนิเสธของประพจน์เดิม อาจพิจารณาจากสถานการณ์ในชีวิตจริงได้ เช่น

ให้ p แทนข้อความ “หนูดีอ่านหนังสือ”

จะได้ว่า $\sim p$ แทนข้อความ “หนูดีไม่ได้อ่านหนังสือ”

จะได้ตารางค่าความจริง ดังนี้

| สิ่งที่หนูดีกำลังทำ | หนูดีอ่านหนังสือ (p) | หนูดีไม่ได้อ่านหนังสือ ($\sim p$) |
|---|--------------------------|-------------------------------------|
|  | T | F |
|  | F | T |

2.2.2 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “และ”

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ แล้ว การเชื่อมประพจน์ p และประพจน์ q ด้วยตัวเชื่อม “และ” (and) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $p \wedge q$

ตัวอย่างการเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “และ”

| p | q | $p \wedge q$ |
|-------------------------|----------------------------|---|
| ประจิมชอบวิชาคณิตศาสตร์ | นุชชอบวิชาภาษาอังกฤษ | ประจิมชอบวิชาคณิตศาสตร์และนุชชอบวิชาภาษาอังกฤษ |
| $2 + 3 = 5$ | $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ | $2 + 3 = 5$ และ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ |
| ปิ่นโตได้รับเงินเดือน | ปิ่นโตได้รับโบนัส | ปิ่นโตได้รับเงินเดือนและปิ่นโตได้รับโบนัส (หรืออาจเขียนโดยย่อเป็น ปิ่นโตได้รับเงินเดือนและโบนัส) |

ในการเชื่อมประพจน์ด้วย “และ” มีข้อตกลงว่าประพจน์ใหม่จะเป็นจริงในกรณีที่ประพจน์ที่นำมาเชื่อมกันนั้นเป็นจริงทั้งคู่ กรณีอื่น ๆ เป็นเท็จทุกกรณี เขียนตารางค่าความจริงของ $p \wedge q$ ได้ดังนี้

| p | q | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

จากตารางค่าความจริงข้างต้น เมื่อต้องการหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม “และ” ให้พิจารณาค่าความจริงของประพจน์ที่นำมาเชื่อมว่าตรงกับกรณีใด เช่น ต้องการหาค่าความจริงของ

3 หาร 9 ลงตัว และ 9 เป็นจำนวนคี่

จะต้องพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ “3 หาร 9 ลงตัว” และ “9 เป็นจำนวนคี่” ซึ่งมีค่าความจริงเป็นจริงทั้งคู่ ดังนั้น ค่าความจริงของ “3 หาร 9 ลงตัว และ 9 เป็นจำนวนคี่” คือ จริง

ในทำนองเดียวกัน ค่าความจริงของ

$\sqrt{3}$ เป็นจำนวนจริง และ $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

คือ เท็จ เพราะประพจน์ “ $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนตรรกยะ” มีค่าความจริงเป็นเท็จ





ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม “และ” อาจพิจารณาจากสถานการณ์ในชีวิตจริงได้ เช่น

ให้ p แทนข้อความ “ลูกปิดใส่เสื้อสีขาว”

และ q แทนข้อความ “ลูกปิดใส่กางเกงสีฟ้า”

จะได้ว่า $p \wedge q$ แทนข้อความ “ลูกปิดใส่เสื้อสีขาวและลูกปิดใส่กางเกงสีฟ้า” หรือเขียนโดยย่อเป็น “ลูกปิดใส่เสื้อสีขาวและกางเกงสีฟ้า”

จะได้ตารางค่าความจริง ดังนี้

| การแต่งกาย ของลูกปิด | ลูกปิดใส่เสื้อสีขาว (p) | ลูกปิดใส่กางเกงสีฟ้า (q) | ลูกปิดใส่เสื้อสีขาว และกางเกงสีฟ้า ($p \wedge q$) |
|---|--------------------------------|---------------------------------|---|
|  | T | T | T |
|  | T | F | F |
|  | F | T | F |
|  | F | F | F |

สำหรับภาษาที่ใช้ในชีวิตประจำวัน อาจแทนตัวเชื่อม “และ” ด้วยคำอื่นซึ่งให้ความหมาย
 อย่างเดียวกัน เช่น “แต่” “นอกจากนั้นแล้ว” “ถึงแม้ว่า” “ในขณะที่” ตัวอย่างประโยคที่
 พบได้ในชีวิตประจำวัน เช่น

- วรรณชอบวิชาคณิตศาสตร์แต่ชอบวิชาภาษาอังกฤษ
- สมศักดิ์เป็นหัวหน้าห้องนอกจากนั้นแล้วยังเป็นประธานนักเรียนด้วย
- วิชัยทำงานหนักถึงแม้ว่าเขาป่วย
- น้ำผึ้งอ่านหนังสือในขณะที่น้ำฝนดูโทรทัศน์

2.2.3 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “หรือ”

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ แล้ว การเชื่อมประพจน์ p และประพจน์ q ด้วยตัวเชื่อม “หรือ” (or) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $p \vee q$

ตัวอย่างการเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “หรือ”

| p | q | $p \vee q$ |
|-----------------|--|---|
| โสมทำการบ้าน | โสมอ่านหนังสือ | โสมทำการบ้านหรือโสมอ่านหนังสือ (หรืออาจเขียนโดยย่อเป็น โสมทำการบ้านหรืออ่านหนังสือ) |
| 3 เป็นจำนวนคู่ | $-1 < 0$ | 3 เป็นจำนวนคู่ หรือ $-1 < 0$ |
| อากาศร้อน | เครื่องปรับอากาศเสีย | อากาศร้อนหรือเครื่องปรับอากาศเสีย |
| $1 + 5 = 5 + 1$ | $4(2 + 3) = (4 \times 2) + (4 \times 3)$ | $1 + 5 = 5 + 1$ หรือ $4(2 + 3) = (4 \times 2) + (4 \times 3)$ |

ในการเชื่อมประพจน์ด้วย “หรือ” มีข้อตกลงว่าประพจน์ใหม่จะเป็นเท็จในกรณีที่ประพจน์ที่นำมาเชื่อมกันเป็นเท็จทั้งคู่ กรณีอื่น ๆ เป็นจริงทุกกรณี เขียนตารางค่าความจริงของ $p \vee q$ ได้ดังนี้

| p | q | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

จากตารางจะหาค่าความจริงของประพจน์ที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อม “หรือ” ได้ดังตัวอย่าง

- 1) “ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ หรือ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนเต็ม” มีค่าความจริงเป็นเท็จ เพราะ “ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ” และ “ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนเต็ม” มีค่าความจริงเป็นเท็จทั้งคู่
- 2) “2 เป็นจำนวนคู่ หรือ 2^3 เป็นจำนวนคี่” มีค่าความจริงเป็นจริง เพราะ “2 เป็นจำนวนคู่” มีค่าความจริงเป็นจริง

หมายเหตุ ความหมายของคำว่า “หรือ” ที่ใช้โดยทั่วไปมีสองกรณี

กรณีที่ 1 หมายถึง ใดอย่างหนึ่งเท่านั้น เช่น การโยนเหรียญครั้งละ 1 เหรียญ แต่ละครั้งเหรียญจะขึ้นหัวหรือก้อยเพียงอย่างเดียว





กรณีที่ 2 หมายถึง ใดอย่างหนึ่งหรือทั้งสองอย่าง เช่น ครูให้รางวัลแก่นักเรียนที่เรียนดีหรือนักเรียนที่ช่วยกิจกรรมของโรงเรียน นักเรียนที่ได้รับรางวัลบางคนอาจเรียนดีเพียงอย่างเดียว บางคนอาจช่วยกิจกรรมของโรงเรียนเพียงอย่างเดียว แต่บางคนอาจทั้งเรียนดีและช่วยกิจกรรมของโรงเรียน ในตรรกศาสตร์มีข้อตกลงว่า ตัวเชื่อม “หรือ” หมายถึงกรณีที่ 2

ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม “หรือ” อาจพิจารณาจากสถานการณ์ในชีวิตจริงได้ เช่น ให้ p แทนข้อความ “ต้นน้ำเลี้ยวแมว”

และ q แทนข้อความ “ต้นน้ำเลี้ยวนก”

จะได้ว่า $p \vee q$ แทนข้อความ “ต้นน้ำเลี้ยวแมวหรือต้นน้ำเลี้ยวนก” หรือเขียนโดยย่อเป็น “ต้นน้ำเลี้ยวแมวหรือนก”

จะได้ตารางค่าความจริง ดังนี้

| สถานการณ์ | ต้นน้ำเลี้ยงแมว (p) | ต้นน้ำเลี้ยงนก (q) | ต้นน้ำเลี้ยงแมวหรือนก ($p \vee q$) |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
|  | T | T | T |
|  | T | F | T |
|  | F | T | T |
|  | F | F | F |

2.2.4 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว...”

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ แล้ว การเชื่อมประพจน์ p และประพจน์ q ด้วยตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว...” (if...then...) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $p \rightarrow q$

$p \rightarrow q$ แทน ถ้า p แล้ว q เรียก p ว่า เหตุ และเรียก q ว่า ผล

ตัวอย่างการเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว...”

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|------------------------------|--------------------------|---|
| ป็นตั้งใจเรียน | ป็นจะสอบผ่าน | ถ้าป็นตั้งใจเรียนแล้วป็นจะสอบผ่าน |
| ปัดสอบได้ที่หนึ่ง | แม่จะให้รางวัล | ถ้าปัดสอบได้ที่หนึ่งแล้วแม่จะให้รางวัล |
| วันนี้ฝนตก | หลังคาบ้านเปียก | ถ้าวันนี้ฝนตกแล้วหลังคาบ้านเปียก |
| แมวของปึกได้รับการฝึกอย่างดี | แมวของปึกจะไม่ข่วนผ้า่าน | ถ้าแมวของปึกได้รับการฝึกอย่างดีแล้วแมวของปึกจะไม่ข่วนผ้า่าน |
| $2+3 = 3+2$ | $4(2+3) = 4(3+2)$ | ถ้า $2+3 = 3+2$ แล้ว $4(2+3) = 4(3+2)$ |

ในการเชื่อมประพจน์ด้วย “ถ้า...แล้ว...” มีข้อตกลงว่าประพจน์ใหม่จะเป็นเท็จในกรณีที่เหตุเป็นจริงและผลเป็นเท็จเท่านั้น กรณีอื่น ๆ เป็นจริงทุกกรณี เขียนตารางค่าความจริงของ $p \rightarrow q$ ได้ดังนี้

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

จากตารางจะหาค่าความจริงของประพจน์ที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว...” ได้ดังตัวอย่าง

- 1) “ถ้า 5 เป็นจำนวนคี่ แล้ว 5^4 เป็นจำนวนคี่” มีค่าความจริงเป็นจริง เพราะ “5 เป็นจำนวนคี่” และ “ 5^4 เป็นจำนวนคี่” มีค่าความจริงเป็นจริงทั้งคู่
- 2) “ถ้า 0 เป็นจำนวนเต็ม แล้ว 0 เป็นจำนวนลบ” มีค่าความจริงเป็นเท็จ เพราะ “0 เป็นจำนวนเต็ม” และ “0 เป็นจำนวนลบ” มีค่าความจริงเป็นจริงและเท็จ ตามลำดับ

ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว...” อาจพิจารณาจากสถานการณ์ในชีวิตจริงได้ เช่น

ให้ p แทนข้อความ “จิวกวาดบ้านเสร็จ”

และ q แทนข้อความ “พ่อจะให้ขนม”

จะได้ว่า $p \rightarrow q$ แทนข้อความ “ถ้าจิวกวาดบ้านเสร็จแล้วพ่อจะให้ขนม”

การรักษาสัญญาของพ่อจะเทียบกับค่าความจริงของ $p \rightarrow q$ ซึ่งในกรณีที่ $p \rightarrow q$ เป็นจริง หมายถึง พ่อรักษาสัญญา ในกรณีที่ $p \rightarrow q$ เป็นเท็จ หมายถึง พ่อไม่รักษาสัญญา

จะได้ตารางค่าความจริง ดังนี้

| จิวกวาดบ้านเสร็จ (p) | พ่อจะให้ขนม (q) | พ่อรักษาสัญญา ($p \rightarrow q$) |
|-----------------------------|------------------------|--|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

2.2.5 การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ก็ต่อเมื่อ”

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ แล้ว การเชื่อมประพจน์ p และประพจน์ q ด้วยตัวเชื่อม “ก็ต่อเมื่อ” (if and only if) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $p \leftrightarrow q$

ตัวอย่างการเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “ก็ต่อเมื่อ”

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|--|--|---|
| ดาวเรียนจบ | ดาวสอบผ่านทุกวิชา | ดาวเรียนจบก็ต่อเมื่อ ดาวสอบผ่านทุกวิชา |
| รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว | รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน | รูปสามเหลี่ยม ABC เป็น รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วก็ต่อเมื่อ รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน |
| $2 + 3 = 3 + 2$ | $4(2 + 3) = 4(3 + 2)$ | $2 + 3 = 3 + 2$ ก็ต่อเมื่อ $4(2 + 3) = 4(3 + 2)$ |

ในการเชื่อมประพจน์ด้วย “ก็ต่อเมื่อ” มีข้อตกลงว่า ประพจน์ใหม่จะเป็นจริงในกรณีทีประพจน์ที่นำมาเชื่อมกันนั้นเป็นจริงทั้งคู่หรือเป็นเท็จทั้งคู่เท่านั้น กรณีอื่น ๆ เป็นเท็จเสมอ เขียนตารางค่าความจริงของ $p \leftrightarrow q$ ได้ดังนี้

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

จากตารางจะหาค่าความจริงของประพจน์ที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อม “ก็ต่อเมื่อ” ได้ดังตัวอย่าง

- 1) “ $2 < 3$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ ” มีค่าความจริงเป็นจริง เพราะ “ $2 < 3$ ” และ “ $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ ” มีค่าความจริงเป็นจริงทั้งคู่
- 2) “ $2^2 = (-2)^2$ ก็ต่อเมื่อ $2 = -2$ ” มีค่าความจริงเป็นเท็จ เพราะ “ $2^2 = (-2)^2$ ” มีค่าความจริงเป็นจริง แต่ “ $2 = -2$ ” มีค่าความจริงเป็นเท็จ
- 3) “7หารด้วย 2 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ 7 เป็นจำนวนคู่” มีค่าความจริงเป็นจริง เพราะ “7 หารด้วย 2 ลงตัว” และ “7 เป็นจำนวนคู่” มีค่าความจริงเป็นเท็จทั้งคู่

ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม “ก็ต่อเมื่อ” อาจพิจารณาจากสถานการณ์ในชีวิตจริงได้ เช่น โรงเรียนแห่งหนึ่งกำหนดว่า “นักเรียนได้เกรด 4 วิชาคณิตศาสตร์ก็ต่อเมื่อนักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 80% ของคะแนนทั้งหมด” สมมติว่าปุยนุ่นเป็นนักเรียนของโรงเรียนแห่งนี้

ให้ p แทนข้อความ “ปุยนุ่นได้เกรด 4 วิชาคณิตศาสตร์”

และ q แทนข้อความ “ปุยนุ่นได้คะแนนตั้งแต่ 80% ของคะแนนทั้งหมด”

จะได้ว่า $p \leftrightarrow q$ แทนข้อความ “ปุยนุ่นได้เกรด 4 วิชาคณิตศาสตร์ก็ต่อเมื่อนักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 80% ของคะแนนทั้งหมด”

การเกิดขึ้นได้ของสถานการณ์นี้จะเทียบได้กับค่าความจริงของ $p \leftrightarrow q$ ซึ่งในกรณีที่สถานการณ์นี้เกิดขึ้นได้จริง จะได้ว่า $p \leftrightarrow q$ เป็นจริง ส่วนในกรณีที่สถานการณ์นี้ไม่สามารถเกิดขึ้นได้ จะได้ว่า $p \leftrightarrow q$ เป็นเท็จ

จะได้ตารางค่าความจริง ดังนี้

| ปุยนุ่นได้เกรด 4 วิชาคณิตศาสตร์ (p) | ปุยนุ่นได้คะแนนตั้งแต่ 80% ของคะแนนทั้งหมด (q) | การเกิดขึ้นได้ของสถานการณ์นี้ ($p \leftrightarrow q$) |
|--|---|--|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

ประพจน์ $p \leftrightarrow q$ มีความหมายว่า $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ พิจารณาประพจน์ต่อไปนี้

$$p \text{ แทน } 2(3+2) = 2 \times 5$$

$$q \text{ แทน } 3+2 = 5$$

เมื่อเชื่อมประพจน์ทั้งสองด้วย “ก็ต่อเมื่อ” ประพจน์ $p \leftrightarrow q$ ที่ได้ใหม่คือ

$$2(3+2) = 2 \times 5 \text{ ก็ต่อเมื่อ } 3+2 = 5$$

ซึ่งมีความหมายเป็น

$$\text{ถ้า } 2(3+2) = 2 \times 5 \text{ แล้ว } 3+2 = 5 \text{ และ ถ้า } 3+2 = 5 \text{ แล้ว } 2(3+2) = 2 \times 5$$

จากตารางค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อมแบบต่าง ๆ ที่กล่าวมาแล้ว มีไว้เพื่อช่วยในการหาค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบ เมื่อทราบค่าความจริงของประพจน์เชิงเดี่ยวดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1

จงหาค่าความจริงของประพจน์ “ประเทศไทยตั้งอยู่ในภูมิภาคเอเชียตะวันออกเฉียงใต้และอยู่ใกล้เส้นศูนย์สูตร”

วิธีทำ ให้ p แทน ประเทศไทยตั้งอยู่ในภูมิภาคเอเชียตะวันออกเฉียงใต้

q แทน ประเทศไทยตั้งอยู่ใกล้เส้นศูนย์สูตร

ประพจน์ที่กำหนดให้อยู่ในรูป $p \wedge q$

เนื่องจาก p เป็นจริง และ q เป็นจริง จะได้ $p \wedge q$ เป็นจริง

ดังนั้น ประพจน์ “ประเทศไทยตั้งอยู่ในภูมิภาคเอเชียตะวันออกเฉียงใต้และอยู่ใกล้เส้นศูนย์สูตร” มีค่าความจริงเป็นจริง ■

การหาค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบที่มีตัวเชื่อมตั้งแต่สองตัวขึ้นไป ทำได้โดยหาค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบในวงเล็บก่อน แต่ถ้าประพจน์นั้นไม่ได้ใส่วงเล็บ ให้หาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม “ \sim ” ก่อน แล้วจึงหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม “ \wedge ”, “ \vee ” จากนั้นจึงหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม “ \rightarrow ” และลำดับสุดท้ายเป็นการหาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม “ \leftrightarrow ”

ตัวอย่างที่ 2

กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ จริง และจริง ตามลำดับ
จงหาค่าความจริงของประพจน์ $(p \vee q) \wedge r$

วิธีทำ เนื่องจาก p เป็นเท็จ และ q เป็นจริง จะได้ $p \vee q$ เป็นจริง
จาก $p \vee q$ เป็นจริง และ r เป็นจริง
จะได้ $(p \vee q) \wedge r$ เป็นจริง ■

ตัวอย่างที่ 3

จงหาค่าความจริงของประพจน์ $(s \wedge \sim p) \leftrightarrow (q \rightarrow \sim r)$ เมื่อ p, q, r และ s เป็นประพจน์
ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ จริง จริง และจริง ตามลำดับ

วิธีทำ เนื่องจาก s เป็นจริง และ $\sim p$ เป็นจริง จะได้ $s \wedge \sim p$ เป็นจริง
เนื่องจาก q เป็นจริง และ $\sim r$ เป็นเท็จ จะได้ $q \rightarrow \sim r$ เป็นเท็จ
ดังนั้น $(s \wedge \sim p) \leftrightarrow (q \rightarrow \sim r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ■



แบบฝึกหัด 2.2

- จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้ และบอกค่าความจริงของประพจน์ที่เป็นนิเสธของประพจน์ที่กำหนดให้
 - $4 + 9 = 10 + 3$
 - $-6 \leq 7$
 - $\sqrt{100}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม
 - $2 \notin \{2\}$



แบบฝึกหัด 2.2

2. กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง และเท็จ ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

- 1) $\sim p$
- 2) $\sim q$
- 3) $p \wedge q$
- 4) $p \vee q$
- 5) $p \rightarrow q$
- 6) $p \leftrightarrow q$
- 7) $p \wedge \sim q$
- 8) $\sim p \vee q$
- 9) $\sim p \wedge \sim q$
- 10) $\sim(p \wedge \sim q)$
- 11) $p \leftrightarrow (q \rightarrow p)$
- 12) $(\sim p \vee q) \rightarrow (p \wedge \sim q)$

3. จงเขียนข้อความต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์และหาค่าความจริง

- 1) งูเห่าและงูจงอางเป็นสัตว์มีพิษ
- 2) โลม่าหรือคนเป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยนม
- 3) ดวงอาทิตย์ไม่ได้ขึ้นทางทิศตะวันออก
- 4) ม้ามีปีกก็ต่อเมื่อคนบินได้
- 5) 13 เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ 13 มีตัวประกอบคือ 1 กับ 13 เท่านั้น
- 6) ถ้า 3 เป็นจำนวนคี่ แล้ว 3^2 เป็นจำนวนคี่
- 7) $1 \notin \{1,2\}$ และ $1 \subset \{1,2\}$
- 8) 9 ไม่เท่ากับ 10 หรือ 10 ไม่น้อยกว่า 9



แบบฝึกหัดท้ายบท

- จงพิจารณาประโยคหรือข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นประพจน์หรือไม่ ถ้าเป็นประพจน์ จงหาค่าความจริงของประพจน์นั้นด้วย
 - ฝนตกหรือเปล่า
 - จังหวัดเชียงใหม่ไม่อยู่ในภาคใต้ของประเทศไทย
 - วาฬเป็นสัตว์เลี้ยงลูกด้วยน้ำนม
 - วันที่ 30 กุมภาพันธ์ 2530 เป็นวันจันทร์
 - ช่วยด้วย
 - $\pi = \frac{22}{7}$
 - ห้ามเดินลัดสนาม
 - อยากไปเที่ยวเหลือเกิน
 - $35\% = 0.35$
 - ดาวพุธเป็นดาวเคราะห์
- จงเขียนข้อความต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์
 - นที่ไปโรงเรียนโดยรถประจำทางหรือจักรยานยนต์รับจ้าง
 - บุคคลจะต้องรับผิดชอบในทางอาญาก็ต่อเมื่อได้กระทำโดยเจตนา
 - สาครมีเงินและมีเพื่อนรายล้อมแต่กลับไม่มีความสุข
 - ถ้าออมสอบชิงทุนไปเรียนต่อต่างประเทศได้และเรียนจบด้วยคะแนนเกียรตินิยมแล้ว พ่อของออมจะซื้อรถยนต์ให้เป็นรางวัล
 - หากจำเลยในคดีเป็นผู้วิกลจริต จำเลยไม่ต้องถูกสอบสวนหรือไม่ต้องรับโทษ
 - ถ้าต้นปลอมหรือแปลงธนบัตรแล้วต้นจะต้องได้รับโทษจำคุก 20 ปี หรือปรับไม่เกิน 40,000 บาท หรือทั้งจำทั้งปรับ

3. จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้ และบอกค่าความจริงของประพจน์ที่เป็นนิเสธ
- 1) $-20 + 5 > -17$
 - 2) 37 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ
 - 3) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
 - 4) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
4. จงเขียนประโยคหรือข้อความที่เป็นประพจน์เชิงประกอบที่ใช้ตัวเชื่อม “ไม่” “และ” “หรือ” “ถ้า...แล้ว...” และ “ก็ต่อเมื่อ” มาอย่างละ 1 ประพจน์
5. กำหนดให้ p แทนข้อความ “2 เป็นจำนวนคู่”
 q แทนข้อความ “โลกเป็นดาวเคราะห์”
 และ r แทนข้อความ “ $-5 + 8 = -13$ ”
 จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
- 1) $(p \wedge q) \vee r$
 - 2) $(\sim q \vee r) \wedge p$
 - 3) $r \leftrightarrow \sim p$
 - 4) $\sim p \vee \sim r$
 - 5) $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)$
6. จงเขียนข้อความต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์โดยใช้ตัวเชื่อม และหาค่าความจริงของข้อความ
- 1) ถ้า 4 เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว 4 เป็นจำนวนคี่
 - 2) $3 \geq 2$ และ $-2 \geq -3$
 - 3) 100 กิโลกรัมเท่ากับ 1 ตัน หรือ 10 ชีดเท่ากับ 1 กิโลกรัม
 - 4) $\{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 4\}$ เป็นเซตว่าง หรือ $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 1\}$ ไม่เป็นเซตว่าง
 - 5) $A \cup A = A$ และ $A - \emptyset = U$

7. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์

- 1) ถ้า $q \wedge r$ มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์ q และ r
- 2) ถ้า $r \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ r และ q
- 3) ถ้า $p \vee q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$
- 4) ถ้า $p \rightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ $(p \vee q) \wedge r$

8. บริษัทด้านคอมพิวเตอร์แห่งหนึ่งมีเงื่อนไขการเลื่อนตำแหน่งพนักงานเป็นพนักงานอาวุโส ดังนี้

- พนักงานต้องมีอายุไม่ต่ำกว่า 30 ปี
- พนักงานต้องจบปริญญาโทขึ้นไป
- พนักงานต้องทำงานกับบริษัทนี้อย่างน้อย 3 ปี หรือมีประสบการณ์การทำงานด้านคอมพิวเตอร์อย่างน้อย 7 ปี

จงหาว่าพนักงานต่อไปนี้ ใครจะมีสิทธิ์ได้เลื่อนตำแหน่ง

| ชื่อ | อายุ (ปี) | วุฒิการศึกษา | ประวัติการทำงาน |
|---------|-----------|-----------------------------|--|
| ฟ้าใส | 31 | ปริญญาโท สาขาคณิตศาสตร์ | ทำงานกับบริษัทนี้มา 2 ปี และเคยทำงานด้านคอมพิวเตอร์มา 5 ปี ก่อนเข้าทำงานกับบริษัทนี้ |
| รุ่งนภา | 29 | ปริญญาโท สาขาคอมพิวเตอร์ | ทำงานกับบริษัทนี้มา 6 ปี |
| ธนา | 42 | ปริญญาเอก สาขาชีววิทยา | ทำงานกับบริษัทนี้มา 2 ปี และเคยทำสวนผักปลอดสารพิษ 10 ปี |

9. บริษัทแห่งหนึ่งต้องการมอบเงินรางวัลประจำปีให้แก่พนักงานในบริษัท โดยขึ้นกับเงื่อนไขต่อไปนี้

- ถ้าทำยอดขายใน 1 ปี ได้เกิน 3,000,000 บาท จะได้เงินรางวัล 1.5 เท่าของเงินเดือน

- ถ้าทำยอดขายใน 1 ปี ได้เกิน 5,000,000 บาท และไม่ลาภกิจ จะได้เงินรางวัล 2 เท่าของเงินเดือน
- ถ้าทำยอดขายใน 1 ปี ได้เกิน 10,000,000 บาท ไม่ลาพักผ่อน และไม่ลาภกิจ จะได้เงินรางวัล 4 เท่าของเงินเดือน

หมายเหตุ พนักงานคนหนึ่งสามารถรับได้เพียงรางวัลเดียวที่เป็นรางวัลที่ดีที่สุด

จงหาว่าพนักงานแต่ละคนต่อไปนี้จะได้รับเงินรางวัลคนละเท่าใด

| ชื่อ | เงินเดือน (บาท) | ยอดขาย (บาท) | ประวัติการลา (วัน) | | |
|--------|--------------------|-----------------|--------------------|--------|--------|
| | | | ลาพักผ่อน | ลาป่วย | ลาภกิจ |
| สุรียา | 30,000 | 6,000,000 | 3 | - | 2 |
| เมฆา | 100,000 | 1,500,000 | 4 | 5 | 3 |
| กมล | 70,000 | 10,000,000 | - | 10 | - |
| ทิวา | 200,000 | 15,000,000 | - | 4 | - |

10. บริษัทสินเชื่อแห่งหนึ่งให้กู้เงิน 100,000 บาท โดยมีเงื่อนไขดังนี้
- ผู้กู้ต้องมีเงินเดือนไม่น้อยกว่า 30,000 บาท
 - ถ้าผู้กู้มีคู่สมรส แล้วผู้กู้และคู่สมรสจะต้องมีเงินเดือนรวมกันไม่น้อยกว่า 70,000 บาท
 - ผู้กู้จะต้องมีเงินเหลือหลังหักค่าใช้จ่ายในแต่ละเดือนมากกว่า 5,000 บาท

จงหาว่าบุคคลต่อไปนี้จะสามารถกู้เงินกับบริษัทนี้ได้หรือไม่

- (ก) สัญญาได้รับเงินเดือนเดือนละ 36,000 บาท และภรรยาได้รับเงินเดือนเดือนละ 35,000 บาท สัญญามีค่าใช้จ่ายแต่ละเดือน 33,000 บาท และภรรยามีค่าใช้จ่ายแต่ละเดือน 34,000 บาท
- (ข) กวินได้รับเงินเดือนเดือนละ 50,000 บาท แต่ภรรยาไม่มีรายได้ และเหลือเงินเก็บหลังหักค่าใช้จ่าย 9,000 บาท
- (ค) ม่านแก้วเป็นหม้าย มีลูก 1 คน ได้เงินเดือนเดือนละ 70,000 บาท และมีค่าใช้จ่ายแต่ละเดือน 40,000 บาท